数列二级结论（附证明）

数列

奇偶型数列处理方式：

若 $a_n=\begin{cases} f(n), & n=2k-1 \\ g(n), & n=2k \end{cases}, k\in N^*$ 则

$$a_n=\frac{f(n)+g(n)}{2}+(-1)^{n-1}\frac{f(n)-g(n)}{2}$$

（合二为一）

常见求和公式：

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

$2+4+6+\cdots+(2n)=\sum_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1)$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$

$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$

$\{a_n\}$ 为公差为d的等差数列， $\{b_n\}$ 为公比为q的等比数列，若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_n\cdot b_n$ ，则数列 $\{c_n\}$ 的前n项和为

$$S_n=\frac{a_1b_1-a_nb_{n+1}}{1-q}+\frac{db_2\left(1-q^{n-1}\right)}{(1-q)^2}(d\neq 0,q\neq 1)$$

无穷等比数列{an}的和：

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q},|q|<1$$

求数列 $\left\{(an+b)q^{n-1}\right\}$ 的前n项的和:

（1）错位相减套公式：

数列 $\left\{(an+b)q^{n-1}\right\}(a\neq 0,q\neq 1)$ 的前n项和 $S_n=(An+B)q^n-B$

其中： $A=\dfrac{a}{q-1}$ $B=\dfrac{b-A}{q-1}$

（2）化常数列求和：

$S_n-S_{n-1}=(an+b)x^{n-1}\Rightarrow$
$S_n+(An+B)x^n=S_{n-1}+[A(n-1)+B]x^{n-1}$

一般数列的处理方法（递推数列）

（1）型如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 的递推数列通常用叠加法求通项.

（2）型如 $a_{n+1}=a_nf(n)$ 的递推数列通常用叠乘法求通项.

（3）型如 $a_{n+1}=Aa_n+B$ (A、B是非0常数，A≠1)的递推数列，通常用待定系数法或求特征根的方法构造等比数列求通项.

（4）型如

$a_{n+1}=Aa_n+Bn+C(A\neq 0,1,BC\neq 0)$ 的递推数列通常用待定系数法构造等比数列求通项.

（5）型如

$a_{n+1}=Aa_n+kB^{n+1}(AB\neq 0,A\neq 1,B\neq 1)$ 的递推数列，当B=A时两边同除以 A^{n+1} 构造等差数列.当B≠A时通常用待定系数法构造等比数列求通项.

（6）型如 $AS_n+Ba_n+C=0$ (Sn是数列前n项和)的递推数列通常利用公式 $S_n=a_n-a_{n-1}(n\geq 2)$ 消和Sn或消项an, 从而化成型如前面的递推数列.

（1）斐波那契数列从第3项起，每一项都是前面两项之和

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

其通项可通过特征根方程求得

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

（2）斐波那契数列的偶数项之和：

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$

（3）斐波那契数列的奇数项之和：

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$ 即

$$\sum_{i\neq 1}^{n}\alpha_{2i-1}=a_{2n}$$

（3）斐波那契数列的前n项之和：

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$

等差数列

已$\{a_n\}$知是一个等差数列，其公差为d，首项为a_1，其前n项和为$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，那么：

① 取定$n_0,k\in N^*$，则其子列$\{a_{n_0+nk}\}=a_{n_0+k},a_{n_0+2k},a_{n_0+3k},\cdots$也为等差数列，其公差为$kd$ 。（等距子列）

② 当$a_1>0,d<0$时，其前n项和S_n在$n=[-\frac{a_1}{d}]+1$处取到最大值；当$a_1<0,d>0$时，其前n项和在$n=[-\frac{a_1}{d}]+1$处取到最小值。其中$[x]$是取整函数，表示不超过x的最大整数。

③ 前n项中奇数项和记作S_{odd}，前项中偶数项和记作S_{even},则：当n为偶数时$S_{even} - S_{odd} = \frac{1}{2}nd$，当 n 为奇数时$S_{odd} - S_{even} = a_{\frac{n+1}{2}}$,。

④ 若$\{a_n\},\{b_n\}$均是等差，其前 n 项和分别为S_n, T_n，则$\{\lambda a_n + \mu b_n\}(\lambda, \mu \in R)$ 仍成等差，$\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$。

⑤ 依次 k 项和成等差数列，即$S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \cdots$成等差数列，且公差为$k^2d$。

⑥ $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列，首项为$a_1$，公差为$\frac{d}{2}$。

⑦ $a_n = \frac{S_{2n-1}}{2n-1}$。

⑧ 项数为偶数 2n 的等差数列$\{a_n\}$，有$S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$；$S_{偶} - S_{奇} = nd$；$\frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$。

⑨ 项数为奇数 $2n-1$ 的等差数列$\{a_n\}$，有$S_{2n-1} = (2n-1)a_n$；$S_{奇} - S_{偶} = a_n$；$\frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \frac{n}{n-1}$。

⑩ 若$a_n = m, a_m = n(m \neq n)$，则$a_{m+n} = 0$

⑪ 若$S_n = m, S_m = n(m \neq n)$，则$S_{m+n} = -(m+n)$。

⑫ 若$S_m = S_n(m \neq n)$，则$S_{m+n} = 0$。。

证明（部分）:

① 令$b_n = a_{n_0+nk}$，则当$n \geq 1$时有:$b_{n+1} - b_n = a_{n_0+(n+1)k} - a_{n_0+nk} = [a_1 + (n_0 + (n+1)k - 1)d] - [a_1 + (n_0 + nk - 1)d] = kd$. 该性质得证。

② 对于$a_1 > 0, d < 0$的情形：记$n_0 = [-\frac{a_1}{d}] + 1$，由$a_n = a_1 + (n-1)d$得，当$n \leq n_0$时有$a_n < 0$。由$S_n - S_{n-1} = a_n(n \geq 2)$，可知在$n \leq n_0$时$S_n - S_{n-1} \geq 0$；在$n \geq n_0 + 1$时，$S_n - S_{n-1} < 0$。因而：$S_1 < S_2 < \cdots < S_{n_0-1} \leq S_{n_0}; S_{n_0} > S_{n_0+1} > S_{n_0+2} > \cdots$即其前$n$项和$S_n$有最大值$S_{n_0}$。$a_1 < 0, d > 0$的情形下类似可得。该性质得证。

③

当n为偶数时，

$$S_{\text{even}} - S_{\text{odd}} = (a_2 + a_4 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{2}nd$$

当n为奇数时，考虑 $a_1, a_3, \ldots, a_n$ 和$a_2, a_4, \ldots, a_{n-1}$都是公差为$2d$的等差数列，因而

$$S_{odd} - S_{\text{even}} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \bullet \frac{n+1}{2} - \frac{(a_2 + a_{n-1})}{2} \bullet \frac{n-1}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)d]}{2} \bullet \frac{n+1}{2} - \frac{[2a_1 + (n-1)d]}{2} \bullet \frac{n-1}{2} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = a_{\frac{n+1}{2}} = a_{\text{middle}}$$

该性质得证。

④ 设$\{a_n\}$公差 d_1，$\{b_n\}$公差 d_2。$c_n = \lambda a_n + \mu b_n$，$c_{n+1} - c_n = \lambda(a_{n+1} - a_n) + \mu(b_{n+1} -$

$b_n) = \lambda d_1 + \mu d_2$。故$\{c_n\}$是公差为 $\lambda d_1 + \mu d_2$的等差数列。$S_{2n-1} = (2n - 1)a_n$，$T_{2n-1} = (2n-1)\, b_n$。$\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n} = \frac{a_n}{b_n}$。

⑤

令$b_n = S_{nk} - S_{(n-1)k} = a_{(n-1)k+1} + a_{(n-1)k+2} + \cdots + a_{nk}$。

则有

$b_{n+1} - b_n = (a_{nk+1} + a_{nk+2} + \cdots + a_{(n+1)k}) - (a_{(n-1)k+1} + a_{(n-1)k+2} + \cdots + a_{nk}) = (a_{nk+1} - a_{(n-1)k+1}) + (a_{nk+2} - a_{(n-1)k+2}) + \cdots + (a_{(n+1)k} - a_{nk}) = kd \bullet k = k^2 d (n \in N_+)$

⑦ 由等差数列性质：前 $2n-1$ 项的和S_{2n-1}等于项数 ×
中间项，其中第n项为中间项，即：$S_{2n-1} = (2n-1) \cdot a_n$；移项即证

⑧ I. $S_{2n} = (a_1 + a_{2n}) + (a_2 + a_{2n-1}) + \ldots + (a_n + a_{n+1})$，在等差数列中，有 $a_k + a_{2n-k+1} = a_1 + a_{2n}$ (常数)。观察发现，每一对的和都相等，且$a_n + a_{n+1}$恰好是正中间的一对。因此，$S_{2n} = n \times (a_n + a_{n+1})$。

II. 将偶数项和奇数项一一对应相减：$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n-1})$，每一项的差都等于公差 d。共有 n 对，所以 $S_{偶} - S_{奇} = n \times d$。

III. **奇数项：**$a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$，共 n 项。这是一个以 a_1 为首项，2d 为公差的等差数列。其最后一项 $a_{2n-1} = a_1 + (n-1)(2d)$。因此，$S_{奇} = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_{2n-1}) = \frac{n}{2} \times [a_1 + a_1 + (n-1)(2d)] = \frac{n}{2} \times [2a_1 + 2(n-1)d] = n \times [a_1 + (n-1)d] = n \times a_n$。

偶数项：$a_2, a_4, \ldots, a_{2n}$，共 n 项。这是一个以a^2为首项，$2d$为公差的等差数列。其最后一项 $a_{2n} = a_2 + (n-1)(2d) = (a_1 + d) + (n-1)(2d) = a_1 + (2n-1)d$。

因此，$S_{偶} = \frac{n}{2} \times (a_2 + a_{2n}) = \frac{n}{2} \times [(a_1 + d) + (a_1 + (2n-1)d)] = \frac{n}{2} \times [2a_1 + 2nd] = n \times (a_1 + nd) = n \times a_{n+1}$。

所以，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \frac{n\, a_n}{n\, a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 。

⑨ I. 项数为 2n-1，中间项是第 n 项 a_n。配对：$a_1 + a_{2n-1} = 2a_n, a_2 + a_{2n-2} = 2a_n, \ldots, a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$。共有(n-1)对，每对和为 $2a_n$，加上单独的中间项 a_n。所以 $S_{2n-1} = (n-1) \times 2a_n + a_n = (2n-2)a_n + a_n = (2n-1)a_n$。

II. **奇数项：**$a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$（共 n 项），构成以 a_1为首项、2d 为公差的等差数列。

$S_{奇} = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_{2n-1}) = \frac{n}{2} \times (2a_n) = n\, a_n$

偶数项：$a_2, a_4, \ldots, a_{2n-2}$（共 n-1 项），构成以 a_2为首项、2d 为公差的等差数列。

$S_{偶} = \frac{n-1}{2} \times (a_2 + a_{2n-2}) = \frac{n-1}{2} \times (2a_n) = (n-1)\, a_n$

因此$S_{奇} - S_{偶} = n\, a_n - (n-1)\, a_n = a_n$。

III. 由上文，$S_{奇} = n\,a_n$，$S_{偶} = (n-1)\,a_n$（假设 $a_n \neq 0$）。所以 $\frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \frac{n\,a_n}{(n-1)\,a_n} = \frac{n}{n-1}$。

⑩ 给定：$a_n = a_1 + (n-1)d = m$。$a_m = a_1 + (m-1)d = n$。

将两个方程相减得$d(n-m) = -(n-m)$；由于$m \neq n$，有$n - m \neq 0$，所以$d = -1$

代入$a_n = m$求得$a_1 = m + (n-1)$。将$(m+n)$带入，得$a_{m+n} = 0$

⑪ 由$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = m$，$S_m = \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = n$，两式相减得：$a_1 + \frac{n+m-1}{2}d = -1$，因此：$2a_1 + (n+m-1)d = -2$，故$S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(2a_1 + (n+m-1)d) = -(m+n)$。

⑫ 根据已知条件 $S_m = S_n$：$\frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow a_1 = \frac{-(m+n-1)d}{2}$，代入$S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(2a_1 + (m+n-1)d)$得$S_{m+n} = 0$

等比数列

已$\{a_n\}$知是一个等比数列，其公比为$q(q \neq 0)$，首项为$a_1(a_1 \neq 0)$，其前n项和为$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$，设$A = -\frac{a_1}{1-q}$，则$S_n = Aq^n - A$.即 Sn 是 n 的指数型函数。有：

①	数列$\{c \cdot a_n\}(c \neq 0), \{\lvert a_n \rvert\}, \{a_n \cdot b_n\}, \{a_n^2\}, \left\{\frac{1}{a_n}\right\}$也成等比数列；
②	数列$a_n, a_{n+k}, a_{n+2k}, a_{n+3k}, \cdots$是等比数列；
③	若$m + n = p + q = 2k$,则$a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q = a_k^2$；
④	数列$S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \cdots (q \neq -1)$成等比数列；
⑤	当n为偶数时,$S_{偶} = S_{奇} \cdot q$；当n为奇数时,$S_{奇} = a_1 + S_{偶} \cdot q$；
⑥	若$\{c_n\}$是等差数列,则$\{a^{c_n}\}(a \neq 0)$是等比数列；
⑦	若$\{a_n\}$是等比数列,则$\{\log_a a_n\}(a > 0, a \neq 1)$是等差数列；
⑧	$S_{m+n} = S_n + q^n S_m = S_m + q^m S_n$

证明（部分）：

④**当公比$q = 1$时**，此时数列为常数列，前n项和 $S_n = na_1$。计算得：$S_n = S_{2n} - S_n = S_{3n} - S_{2n} = \cdots = na_1$呈公比是 1 的等比数列；

当公比$q\neq1$时，对任意$k(k\geq2,k\in N^*)$利用等比数列前 n项和公式$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$计算差项：$S_{(k+1)n}-S_{kn}=\frac{a_1(1-q^{(k+1)n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^{kn})}{1-q}=\frac{a_1(q^{kn}-q^{(k+1)n})}{1-q}=\frac{a_1q^{kn}(1-q^n)}{1-q}$

同理$S_{kn}-S_{(k-1)n}=\frac{a_1q^{(k-1)n}(1-q^n)}{1-q}$，故$\frac{S_{(k+1)n}-S_{kn}}{S_{kn}-S_{(k-1)n}}=q^n$

又因为易证$S_{2n}-S_n=q^nS_n$，且S_n,q^n均不为 0，因此，$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$成等比数列，公比为$q^n$。

⑤I.**当 n 为偶数时，**设 n=2k（k 为正整数），则前 n 项中$S_{偶}=a_2+a_4+\ldots+a_{2k}=qa_1+qa_3+\ldots+qa_{2k-1}=qS_{奇}$

II. **当 n 为奇数时，**设 n=2k+1（k 为非负整数），则前 n 项中$S_{奇}=a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1}=a_1+qa_2+qa_4+\ldots+qa_{2k}=a_1+S_{偶}\cdot q$

⑧**当公比 $q=1$时**，数列为常数列，前n项和$S_n=na_1$。左边：$S_{m+n}=(m+n)a_1$；右边：$S_n+q^nS_m=na_1+1\cdot ma_1=(m+n)a_1$，等式成立。

当公比 $q\neq1$时，前n项和公式为$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$。左边：$S_{m+n}=\frac{a_1(1-q^{m+n})}{1-q}$；右边：

$S_n+q^nS_m=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}+q^n\cdot\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^{m+n})}{1-q}$，等式成立。

裂项

①$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，**通式：**$\frac{1}{n(n+t)}=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+t}\right)(t\neq0)$；

② $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$；

③若数列$\{a_n\}$为等差数列，公差为d，且$a_n\neq0$，$d\neq0$，则$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

④ $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，$\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$；

⑤ $\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$；

⑥$\frac{2^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^n}{n+1}-\frac{2^n}{n+2}$

⑦ $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，$\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+k}-\sqrt{n}}{k}$；

⑧ $log_a \frac{n+1}{n} = log_a(n+1) - log_a n\,(a>0$ 且$a \neq 1)$;

⑨ $\frac{n+1}{n^2(n+2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$;

⑩ $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$.

分母中含$n(n-b)$的在裂项时可尝试待定系数法，见下文“求前n项和”的“裂项相加”一栏。

杂项

一、求通项a_n

1. 定义法、公式法

2. 累加法：形如$a_n - a_{n-1} = f(n)(n \in N^*$且$n \geq 2)$

当$n \geq 2$时，$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots (a_2 - a_1) + a_1 = \cdots$;
当$n = 1$时，$a_1 = \cdots$，（不）满足上式；
综上，$a_n = \cdots$

3. 累乘法：形如$\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n)(n \in N^*$且$n \geq 2)$

当$n \geq 2$时，$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \cdots$;

当$n = 1$时，$a_1 = \cdots$，（不）满足上式；
综上，$a_n = \cdots$

4. 已知S_n求a_n

当$n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = \cdots$;
当$n = 1$时，$a_1 = S_1$，（不）满足上式；
综上，$a_n = \cdots$

5. 待定系数法：

形如$a_n = pa_{n-1} + q(n \in N^*$且$n \geq 2)$

设λ，有$a_n + \lambda = pa_{n-1} + q + \lambda$，使$a_n + \lambda = p(a_{n-1} + \frac{q+\lambda}{p})$，故$\frac{a_n+\lambda}{a_{n-1}+\frac{q+\lambda}{p}} = p$，所以应有$\lambda = \frac{q+\lambda}{p}$，解得$\boldsymbol{\lambda = \frac{q}{p-1}}$。格式上，直接在两边同加$\lambda$，得到

$\frac{a_n+\lambda}{a_{n-1}+\lambda} = p$后使用累乘法计算$\{a_n + \lambda\}$通项后减$\lambda$解决

二、求前n项和S_n

1. 定义法、公式法

等比数列记得讨论$q = 1$和$q \neq 1$两种情况

2. 倒序相加

形如$a_k + a_{n-k+1} = p(k,n \in N^* 且 k \leq n)$则$2S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + \cdots + (a_n+a_1) = np$，即$S_n = \frac{np}{2}$

3. 错位相减

有数列$\{c_n\}$，等差数列$\{a_n\}$，等比数列$\{b_n\}$（公比不为 1），满足$c_n = a_n b_n$，求$\{c_n\}$前n项和S_n。

设$\{a_n\}$首项为a，公差为d，则$a_n = a + (n-1)d$
$\{b_n\}$首项为b，公比为q（$q \neq 1$），则通项为：$b_n = b \cdot q^{n-1}$
因此，$c_n = a_n b_n = [a + (n-1)d] \cdot bq^{n-1}$，错位相减得：

$$S_n = baq^0 + b(a+d)q^1 + b(a+2d)q^2 + \cdots + b[a+(n-2)d]q^{n-2} + b[a+(n-1)d]q^{n-1}$$

$$qS_n = \qquad baq^1 + b(a+d)q^2 + \cdots + b[a+(n-3)d]q^{n-2} + b[a+(n-2)d]q^{n-1} + b[a+(n-1)d]q^n$$

$$(1-q)S_n = baq^0 + bdq^1 + bdq^2 + \cdots + bdq^{n-2} + bdq^{n-1} - b[a+(n-1)d]q^n$$

$$S_n = \frac{1}{1-q}\{ba - b[a+(n-1)d]q^n + \frac{bdq(1-q^{n-1})}{1-q}\}$$

4. 裂项相加

常用结论见裂项篇；

形如$a_n = \frac{f(n)}{n(n-b)\cdot c^n}$或化简后相似的结构可尝试裂项：

设数列e_n满足$e_n = \frac{\lambda}{n\cdot c^n}$，列方程$e_n - e_{n-b} = \frac{\lambda}{n\cdot c^n} - \frac{\lambda}{(n-b)\cdot c^{n-b}} = \frac{\lambda}{n\cdot c^n} - \frac{\lambda\cdot c^b}{(n-b)\cdot c^n} = \frac{f(n)}{n(n-b)\cdot c^n} = a_n$，解得$\lambda$后用$e_n - e_{n-b}$累加得到$S_n$

5. 分组求和

绝对值问题，奇偶问题……